<u>"RACCONTO" SOBRE CONJUNTOS</u>

CNJ I

<u>Observaciones</u>

Probablemente lo indicado en este capítulo sea ya materia conocida.
Sin embargo conviene leerlo, aunque más no sea para familiarizarse con la notación a ser empleada en lo sucesivo.

CNJ II

<u>Definición</u>

CNJ II.1

a. El concepto de conjunto es el más primario de todas las matemáticas.
Algunos autores ni siquiera tratan de encarar su definición, decretando que la idea de conjunto es evidente e intuitiva. Todo lo más dan algunos ejemplos (el conjunto de todos los números naturales; el conjunto de todos los narigones, etc., etc.), o echan mano de ideas afines tales como "agregación" o "colección".

b. Haciendo una tentativa de definición, puede decirse que:
<u>Un conjunto es toda pluralidad que puede ser considerada como una unidad, con la salvedad que dicha pluralidad puede constar de un único individuo y aún de ninguno</u>.
De esta definición surge que un conjunto está definido cuando y sólo cuando están especificados sus entes constitutivos.

c. A los entes susceptibles de formar conjuntos se los llama elementos.
Si un cierto elemento **x** forma parte de un cierto conjunto ***A***, se dirá que "**x pertenece a *A***", lo que se simbolizará como:

$$\mathbf{x} \in \boldsymbol{A}$$

Para indicar que un cierto elemento **z** <u>no</u> pertenece a ***A*** se escribe:

$$\mathbf{z} \notin \boldsymbol{A}$$

CNJ II.2

Según se dijo más arriba, para definir un conjunto es necesario indicar todos sus elementos, a los cuales en la notación corriente se los indica dentro de llaves **{ }** para significar que se los considera formando una unidad. Por ejemplo:

A **: {Todos los argentinos}**
B **: {Pedro, Juan, Luis, esta gota de agua}**
C **: {Todos los jugadores del plantel de Boca}**
D **: {Todos los números naturales}**
E **: {Todos los puntos de un segmento de recta}**

F : {{a, b, c} , {Do, Re, Mi, Juan Pérez}}

Notar que:

1º) ***A, B*** y ***C*** tienen una cantidad finita de elementos.
2º) ***D*** y ***E*** tienen una cantidad infinita de elementos.
3º) Los elementos del conjunto ***F*** son a su vez conjuntos.

CNJ II.3

a. En la definición de conjunto dada en **b.** de **CNJ II.1** se indicó que un conjunto puede eventualmente constar de un único elemento y aún no tener ningún elemento.
Si a primera vista esto resulta algo indigesto, considérese el siguiente conjunto:

K : {Todos los ingenieros que saben tocar el arpa} **[1]**

el cual "a priori" no da lugar a ninguna objeción.
Si a continuación se averigua que ningún ingeniero sabe tocar el arpa, quedan dos caminos abiertos:
1º) Postular la no existencia del conjunto considerado.
2º) Postular la existencia de un conjunto sin elementos.
Se ha optado por el 2º de estos caminos por razones que serán obvias más adelante.
<u>Al conjunto sin elementos se lo llamará conjunto vacío</u> y se lo designará con el signo ∅. Es decir:

Conjunto vacío : { } = ∅

Ningún elemento

b. Por otra parte, si dado el conjunto ***K*** indicado en **[1]** se diera el caso que el único ingeniero que sabe tocar el arpa es Juan Pérez, se tendría entonces que:

K : {Juan Pérez}

teniendo entonces ***K*** un único elemento.
Notar que "**Juan Pérez**" y **{Juan Pérez}** son notaciones de cosas totalmente distintas. "**Juan Pérez**" es el <u>nombre</u> del único ingeniero que sabe tocar el arpa, mientras que **{Juan Pérez}** es un <u>conjunto</u> que tiene como único elemento al Ing. **Juan Pérez**, conjunto que por otra parte es el de todos los ingenieros que saben tocar el arpa.

CNJ II.4

Según arriba indicado, para definir un conjunto es necesario y suficiente especificar todos los elementos que lo forman.
Muy a menudo esta especificación puede efectuarse estableciendo que un conjunto está formado por todos los elementos que tienen un a cierta propiedad.
La notación del caso es la siguiente:

X : {x / Propiedad α}

lo que se lee "El conjunto *X* está formado por todos los elementos x tales que tengan la propiedad α".
Así por ejemplo, el conjunto de todos los números enteros múltiplos de 3 podría ser escrito como:

{x / x entero y múltiplo de 3}

Esta manera de definir conjuntos es sumamente "popular".

CNJ III

Igualdad de conjuntos

Se define que dos conjuntos *A* y *B* son iguales cuando están compuestos por exactamente **los mismos** elementos (resultando así que los símbolos *A* y *B* no son más que nombres distintos del mismo conjunto).
Al respecto, tener en cuenta que en el Algebra de Conjuntos todos los elementos tienen su "personalidad propia". Entonces, si en un conjunto se sustituyen uno o más elementos por elementos idénticos, lo que se obtendrá será otro conjunto.
Así, dadas dos gotas de agua exactamente iguales y dos átomos de Hidrógeno exactamente iguales se tiene que:

{1^er^ gota de agua, 1^er^ átomo de Hidrógeno} ≠
≠ {2^da^ gota de agua, 2^do^ átomo de Hidrógeno}

CNJ IV

Subconjuntos

a. Se define que un conjunto *C* es un subconjunto de otro conjunto *D* cuando todo elemento de *C* pertenece también a *D* (pudiendo haber elementos de *D* que no pertenezcan a *C*).
El hecho de que *C* sea un subconjunto de *D* se indica como:

$$\boldsymbol{C \subset D}$$

Por ejemplo:

{Todos los correntinos} ⊂ {Todos los argentinos}

b. Evidentemente:
1º) Si $\boldsymbol{C \subset D}$ y $\boldsymbol{D \subset C}$ entonces es $\boldsymbol{C = D}$.
2º) Si $\boldsymbol{C = D}$ entonces es $\boldsymbol{C \subset D}$ y $\boldsymbol{D \subset C}$.
Resumiendo:
Si $\boldsymbol{C \subset D}$ y $\boldsymbol{D \subset C}$ entonces $\boldsymbol{C = D}$ y viceversa.

c. Evidentemente:
Si $\boldsymbol{C \subset D}$ y $\boldsymbol{D \subset F}$ entonces $\boldsymbol{C \subset F}$.

d. Evidentemente:
Un conjunto cualquiera es un subconjunto de sí mismo.

CNJ V

<u>Diagrama de Venn</u>

a. Un recurso muy útil para visualizar el Algebra de Conjuntos son los así llamados diagramas de Venn.
En un diagrama de Venn, los elementos se representan como puntos de un plano y un conjunto se representa como una región cerrada, simple o múltiplemente conexa, que abarca a todos los elementos de dicho conjunto y sólo a ellos.
Por ejemplo, dados los conjuntos:

$$\boldsymbol{A} : \{\mathbf{a, b, c, d, e}\} \quad , \quad \boldsymbol{B} : \{\mathbf{a, b, x, y}\} \quad , \quad \boldsymbol{C} : \{\mathbf{a, x, z}\}$$

podría representárselos como indicado en la figura CNJ V. a.

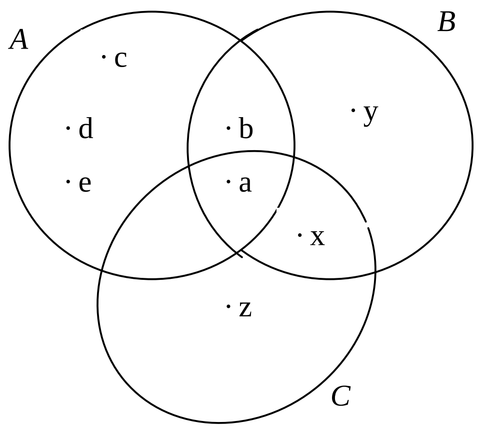


Fig. CNJ V. a

b. Dados dos conjuntos A y B tales que $\boldsymbol{A \subset B}$ y $\boldsymbol{A \neq B}$, se tendrá la situación representada en el Diagrama de Venn de la figura CNJ V. b.

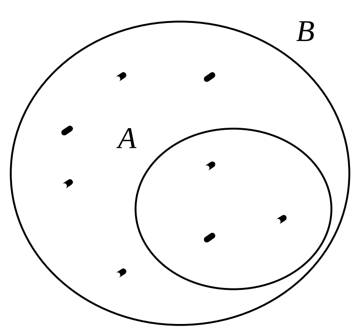
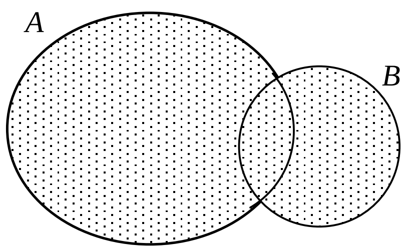


Fig. CNJ V.b

CNJ VI

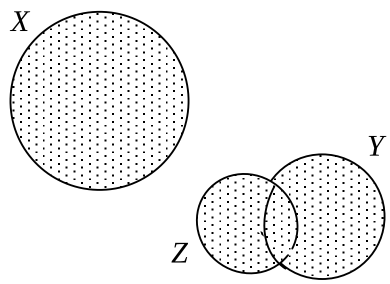
<u>Unión de conjuntos</u>

a. <u>Dados varios conjuntos, se llama unión de los mismos al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos dados</u>.
En las figuras CNJ VI.a y CNJ VI.b se ilustra esta definición por medio de diagramas de Venn.



La unión de *A* y *B* está formada por todos los elementos abarcados por la región grisada.

Fig. CNJ VI.a



La unión de *X*, *Y*, *Z* está formada por todos los elementos abarcados por la región grisada (múltiplemente conexa)

Fig. CNJ VI.b

b. El conjunto unión de los conjuntos $\boldsymbol{A_1 , A_2 , \ldots , A_n}$ se simbolizará como:

$$\boldsymbol{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}$$

c. Evidentemente:

$$\boldsymbol{A_1 \cup \varnothing = A}$$

Conjunto vacío

d. Evidentemente:
1º) $\boldsymbol{A \cup B = B \cup A}$ (propiedad conmutativa)
2º) $\boldsymbol{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$ (propiedad asociativa)

CNJ VII

<u>Intersección de conjuntos</u>

CNJ VII.1

a. <u>Dados varios conjuntos, se llama intersección de los mismos al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a la vez a todos los conjuntos dados</u>.

En las figuras CNJ VII.a, CNJ VII.b y CNJ VII.c se ilustra esta definición mediante diagramas de Venn. En todos los casos, la intersección está formada por todos los elementos abarcados por la respectiva región grisada.

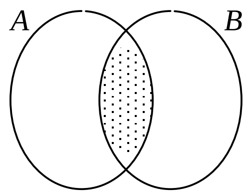


Fig. CNJ VII.a

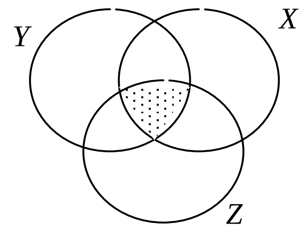


Fig. CNJ VII.b

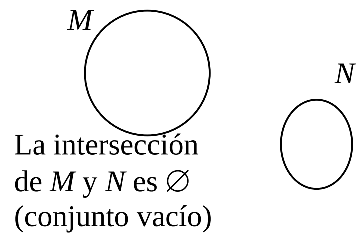


Fig. CNJ VII.c

b. El conjunto intersección de los conjuntos $\boldsymbol{A_1}$ **,** $\boldsymbol{A_2}$ **, ... ,** $\boldsymbol{A_n}$ se simbolizará como:

$$\boldsymbol{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}$$

c. Evidentemente:

$$\boldsymbol{A_1 \cap \varnothing = \varnothing}$$

d. Evidentemente:

1º) $\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$ (propiedad conmutativa)

2º) $\boldsymbol{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$ (propiedad asociativa)

CNJ VII.2

Los conjuntos $\boldsymbol{A_1}$ **,** $\boldsymbol{A_2}$ **, ... ,** $\boldsymbol{A_n}$ serán llamados <u>mutuamente excluyentes o disjuntos</u> cuando no exista ningún elemento que a la vez pertenezca a dos de ellos.
Evidentemente para que $\boldsymbol{A_1}$ **,** $\boldsymbol{A_2}$ **, ... ,** $\boldsymbol{A_n}$ sean mutuamente excluyentes es necesario y suficiente que:

$$\boldsymbol{A_1 \cap A_2 = \varnothing \,, \ldots , A_1 \cap A_n = \varnothing \,, \ldots , A_2 \cap A_n = \varnothing \,, \ldots}$$

CNJ VII.3

Supóngase ahora que en vez de la definición de igualdad de conjuntos dada en CNJ III se hubiera adoptado la siguiente:
Dos conjuntos son iguales cuando entre los elementos de ambos puede establecerse una correspondencia uno a uno entre individuos idénticos.
Es decir que dados dos conjuntos:

A **= {Una cierta gota de agua, un cierto átomo de Hidrógeno}**
B **= {Otra cierta gota de agua, otro cierto átomo de Hidrógeno}**

se tendría que <u>según esta nueva definición</u> sería $\boldsymbol{A = B}$.
Considérese ahora la situación indicada en la figura CNJ VII.d.

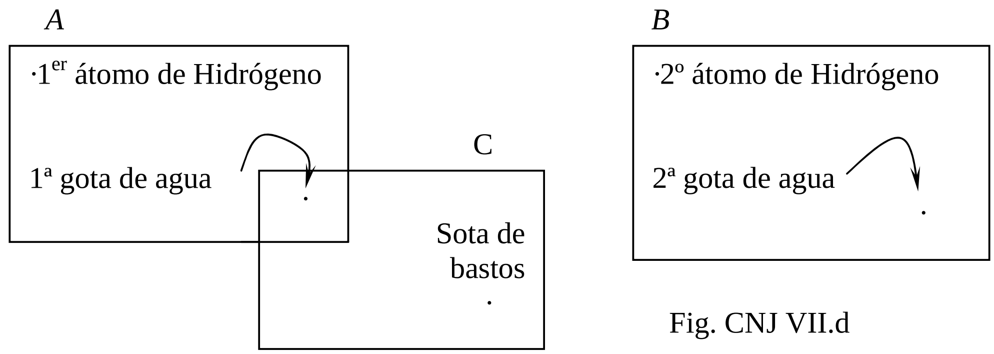


Fig. CNJ VII.d

Se tiene allí que:

1º) $A \cap C = \{1^a \text{ gota de agua}\}$ **[1]**
2º) $B \cap C = \varnothing$ **[2]**
3º) $A = B$ (según la nueva definición) **[3]**

Entonces si en **[1]** se reemplaza al conjunto *A* por su igual *B* se obtiene:

$$B \cap C = \{1^a \text{ gota de agua}\} \qquad \textbf{[4]}$$

y por **[2]** y **[4]** resulta entonces que debería ser:

$$\{1^a \text{ gota de agua}\} = \varnothing$$

lo cual es evidentemente absurdo.
Es decir que de aceptarse esta nueva definición de igualdad de conjuntos resultaría que <u>no sería válido reemplazar en una expresión cualquiera a un conjunto por otro igual a él</u>.
Queda así ilustrado lo poco conveniente que hubiera sido adoptar esta nueva definición de igualdad de conjuntos en vez de la indicada en CNJ III.

CNJ VIII

<u>Distributividad de la intersección de conjuntos con respecto a la unión</u>

a. Se probará que:

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \qquad \textbf{[1]}$$

b. Todo elemento que pertenezca a $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots)$ pertenece a la vez a *A* y a $(B_1 \cup B_2 \cup \ldots)$, es decir que a la vez pertenece a *A* y a por lo menos uno de los conjuntos B_1, B_2, …. Esto implica que dicho elemento pertenezca a por lo menos uno de los conjuntos $(A \cap B_1)$, $(A \cap B_2)$, …, lo que determina que pertenezca a $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots$.
Resumiendo: Todo elemento que pertenezca a $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots)$ pertenece también a $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots$. Es decir que:

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots) \subset (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \qquad \textbf{[2]}$$

c. Todo elemento que pertenezca a $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots$ pertenece también a por lo menos uno de los conjuntos $(A \cap B_1)$, $(A \cap B_2)$, …. Esto determina que dicho elemento pertenezca a la vez a A y a por lo menos uno de los conjuntos B_1, B_2, …, lo que determina que a la vez pertenezca a A y a $(B_1 \cup B_2 \cup \ldots)$, es decir que pertenezca a $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots)$.

Resumiendo: Todo elemento que pertenezca a $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots$ pertenece también a $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots)$. Entonces:

$$(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \subset A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots) \qquad \textbf{[3]}$$

d. Entonces, por **[2], [3]** y por lo indicado en **b** de CNJ IV resulta lo enunciado en **[1].**

CNJ IX

Distributividad de la unión de conjuntos con respecto a la intersección

a. Se probará que:

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots \qquad \textbf{[1]}$$

b. Todo elemento que pertenezca a $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots)$ pertenece a A y/o a $(B_1 \cap B_2 \cap \ldots)$, es decir que pertenece a A y/o a todos los conjuntos B_1, B_2, …. Esto implica que dicho elemento pertenezca a todos los conjuntos $(A \cup B_1)$, $(A \cup B_2)$, …, lo que determina que pertenezca a $(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots$.

Resumiendo: Todo elemento que pertenece a $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots)$ pertenece también a $(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots$. Es decir que:

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots) \subset (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots \qquad \textbf{[2]}$$

c. Todo elemento que pertenece a $(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots$ pertenece a todos los conjuntos $(A \cup B_1)$, $(A \cup B_2)$, …, lo que implica que dicho elemento pertenezca a A y/o a todos los conjuntos B_1, B_2, …, lo que determina que pertenezca a A y/o a $(B_1 \cap B_2 \cap \ldots)$, es decir a $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots)$.

Resumiendo: Todo elemento que pertenezca a $(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots$ pertenece también a $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots)$. Entonces:

$$(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots \subset A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots) \qquad \textbf{[3]}$$

d. Entonces, por **[2], [3]** y por lo indicado en **b** de CNJ IV resulta lo enunciado en **[1].**

CNJ X

Universo

Supóngase que entre todos los conjuntos que aparezcan o puedan aparecer en un cierto razonamiento o demostración exista uno tal que todos los demás sean subconjuntos de él.

A dicho conjunto se lo llamará universo, y se lo designará con la letra *E*.

CNJ XI

Complementación de un conjunto

a. Se define al complemento de un conjunto *A* cualquiera, como el conjunto formado por todos los elementos del universo *E* que no pertenezcan a *A* . A dicho complemento se lo designará como $\overline{A}$.
Simbólicamente:

$$\left[x \in \overline{A}\right] \Leftrightarrow \left[x \in E, x \notin A\right]$$

b. Evidentemente:

$$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$$

$$A \cup \overline{A} = E \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing \qquad \overline{E} = \varnothing \qquad \overline{\varnothing} = E$$

$$A \cup E = E \qquad A \cap E = A \qquad A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$Si \;\; A \cap B \cap \ldots = E \;\; es \;\; A = B = \ldots = E$$

$$Si \;\; A \cup B \cup \ldots = \varnothing \;\; es \;\; A = B = \ldots = \varnothing$$

c. Sean dos conjuntos *A* y *B* tales que:

$$A \cap B = \varnothing \qquad \textbf{[1]}$$
$$A \cup B = E \qquad \textbf{[2]}$$

Por **[1]** todo elemento de *E* que pertenezca a *A* no pertenece a *B*. Por **[2]**, todo elemento de *E* que no pertenece a *A* pertenece a *B*. Resulta entonces que debe cumplirse que:

$$A = \overline{B} \qquad , \qquad \overline{A} = B \qquad \textbf{[3]}$$

Resultando así que las condiciones **[1]** y **[2]** por una parte y la **[3]** por otra, son equivalentes.
Simbólicamente:

$$\left[A \cap B = \varnothing, A \cup B = E\right] \Leftrightarrow \left[A = \overline{B}, \overline{A} = B\right]$$

d. Supóngase que sea:

$$A \subset B \qquad \textbf{[4]}$$

Todo elemento que pertenezca a $\overline{B}$ no pertenece a *B*. Como por **[4]** dicho elemento tampoco pertenecerá entonces a *A*, resulta que pertenecerá a $\overline{A}$. Es decir que si la **[4]** es cierta se tendrá que:

$$\overline{B} \subset \overline{A} \qquad \textbf{[5]}$$

Haciendo el mismo razonamiento partiendo de **[5]**, resultará que la validez de **[5]** implica la de **[4]**. Entonces se tiene que **[4]** y **[5]** son expresiones equivalentes.
Simbólicamente:

$$[A \subset B] \Leftrightarrow [\overline{B} \subset \overline{A}]$$

CNJ XII

<u>Dualización de la complementación</u>

a. Se probará que:

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup ...)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \qquad \textbf{[1]}$$

b. Se tiene que todo elemento pertenece a $\overline{(A_1 \cup A_2 \cup ...)}$ cuando no pertenece a $A_1 \cup A_2 \cup ...$, y por lo tanto no pertenece a ninguno de los A_1 ; A_2 ; ..., lo que implica que pertenece a todos los $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ...$ y por lo tanto que pertenece a $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ...$ es decir que pertenece a $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ...$ Entonces:

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup ...)} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \qquad \textbf{[2]}$$

c. Por otra parte, todo elemento que pertenece a $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ...$ es decir que pertenece a todos los $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ...$ y por lo tanto que no pertenece a ninguno de los A_1 ; A_2 ; ..., es decir que no pertenece a $A_1 \cup A_2 \cup ...$, y por lo tanto pertenece a $\overline{(A_1 \cup A_2 \cup ...)}$. Entonces se tiene que:

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap .. \subset \overline{(A_1 \cup A_2 \cup ...)} \qquad \textbf{[3]}$$

d. Entonces por **[2]** y **[3]** y lo visto en **b** de CNJ IV se tiene lo indicado en **[1]**

e. De una manera similar puede probarse que:

$$\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup ... = \overline{(A_1 \cap A_2 \cap ...)}$$

CNJ XIII

<u>Resta de conjuntos</u>

Sea $A \subset B$. Se define al conjunto $(B - A)$ como el formado por todos los elementos de B que no pertenecen a A.
Evidentemente:

$$B - A = B \cap \overline{A}$$

CNJ XIV

Fórmulas misceláneas

a. Puede verificarse fácilmente que:

$$A \cap (A \cup B \cup ...) = A$$
$$A \cup (A \cap B \cap ...) = A$$

b. $$A \cap (\overline{A} \cup B \cup C \cup ...) = (A \cap \overline{A}) \cup \left[A \cap (B \cup C \cup ...)\right] =$$
$$= \varnothing \cup \left[A \cap (B \cup C \cup ...)\right] = A \cap (B \cup C \cup ...)$$

c. De manera similar:

$$A \cup (\overline{A} \cap B \cap C \cap ...) = A \cup (B \cap C \cap ...)$$

d. Es evidente que:

$$[A \cap B = A] \Rightarrow A \subset B$$

e. Es evidente que:

$$[A \cup B = B] \Rightarrow [A \subset B]$$